

SUJET DE STAGE – M2

GRAPHE D'INTERACTION, PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES ET COMPLEXITÉ DES RÉSEAUX BOOLÉENS

Titre : Graphe d'interaction, propriétés dynamiques et complexité des réseaux booléens.

Encadrants : Florian Bridoux et Adrien Richard — richard@unice.fr — [page-perso](#).

Lieu : Laboratoire [I3S](#), UMR CNRS 71-271, Université Côte d'Azur, Sophia Antipolis.

Durée : 6 mois.

Sujet : Les *réseaux booléens* modélisent des ensembles *finis* de composantes *binaires* évoluant dans un *temps discret* selon des règles d'évolution *locales*. Ils trouvent de nombreuses applications – en biologie, sociologie ou informatique – car, malgré leur simplicité, ils engendrent une grande diversité de comportements dynamiques, faisant d'eux un cadre unificateur pour l'étude des systèmes complexes. Leur théorie relie des domaines variés – théorie des graphes, de la complexité, combinatoire, entre autres – et pose des questions fondamentales sur les relations entre structure, règles locales et comportements émergents.

La dynamique d'un réseau booléen à n composantes est usuellement décrite par les itérations d'une fonction f de l'ensemble des vecteurs binaires à n composantes dans lui-même :

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

On appelle $\{0, 1\}^n$ l'ensemble des *configurations* du réseau, et on appelle f_i la *fonction locale de la composante i* : c'est une fonction booléenne à n composantes, de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$, que l'on code sous la forme d'une *formule booléenne*. La fonction f , que l'on identifie au réseau, est alors codée par les n formules booléennes.

Un théorème profond et récent est le suivant. Soit P une propriété dynamique sur les réseaux booléens exprimable en logique du premier ordre sur la signature $\{=, \rightarrow\}$: les variables sont les configurations, $x = y$ signifie que les configurations x et y sont identiques, et $x \rightarrow y$ signifie que $f(x) = y$. Une telle propriété est triviale si elle a un nombre fini de modèles ou de contre-modèles. Le théorème est :

Soit P non-triviale ; décider si un réseau booléen f satisfait P est NP- ou coNP-difficile [1].

Ainsi, toute propriété non-triviale est difficile à tester, ce qui montre bien qu'il est difficile de comprendre les comportements globaux (P) à partir des règles locales (les fonctions booléennes). À ce titre, les réseaux booléens sont donc bien complexes.

Tester si la dynamique d'un réseau booléen satisfait une certaine propriété est naturel. Cependant, en pratique, dans bien des contextes, on ne possède qu'une information très partielle sur le réseau f . Par exemple, il est classique que la seule information disponible soit le graphe d'interaction G de f : les sommets de G sont les n composantes, et il y a un arc de la composante j sur la composante i si f_i dépend de la composante j . Ainsi, G décrit les influences entre les n composantes du réseau. L'information portée par G est faible car l'ensemble des réseaux booléens dont le graphe d'interaction est G – noté $F(G)$ – est en moyenne doublement exponentiel en n . Si on ne connaît que G , une question naturelle est de décider s'il *existe* un réseau dans $F(G)$ dont la dynamique satisfait la propriété P ; on dit alors (abusivement) que G satisfait P .

Dans l'esprit du théorème mentionné ci-dessus, le sujet du stage consiste à étudier la complexité de décider si un graphe G satisfait une propriété P exprimable en logique du premier ordre. En remplaçant f par G le théorème est faux : il est facile de trouver des propriétés dans P non-triviales telles qu'il est polynomial de décider si G satisfait P (par exemple " $\exists x, x \rightarrow x$ " qui exprime l'existence d'un point fixe). Mais de façon *très* déroutante – et contrairement au cas "signé" [2] – on ne connaît *aucune* propriété P telle qu'il est NP-difficile de décider si G satisfait P ! Le but du stage est d'en trouver une ! Dans l'optique où une telle propriété serait trouvée rapidement, il s'agirait ensuite de trouver des familles de telles propriétés, les plus naturelles possibles. On pourrait aussi envisager de chercher des propriétés qui vont au-delà des classes NP et coNP.

- [1] Rice-like complexity lower bounds for Boolean and uniform automata networks, Goubault-Larrecq, Perrot, preprint, 2025 ([lien arXiv](#)).
- [2] Complexity of fixed point counting problems in Boolean networks, Bridoux, Durbec, Perrot, Richard, Journal of Computer and System Sciences, 226 :138-164, 2022 ([lien arXiv](#)).