

Complexité du problème d'intersection maximum de bases de cycles de poids minimum

Cédric Bentz

Christophe Picouleau

Dimitri Watel

Ete 2026

Mots clefs : Théorie des graphes, Algorithmique de graphes, Programmation avec des bibliothèques de graphes, Base de cycles minimum, (Intersection de matroïdes, Complexité algorithmique, Complexité paramétrée, Approximabilité)

Ces travaux sont financés par la FMJH au travers du projet PGMO MINCY-INTEGRALITY.

1 Résumé du travail à effectuer

Dans ce stage, nous étudions un problème d'optimisation dans les graphes, en particulier dans les graphes dynamiques. Une application possible se situe dans le domaine chémo-informatique. Un graphe temporel sera ici un graphe dont l'ensemble des arêtes évoluent dans le temps. Le problème étudié consiste, connaissant un graphe temporel, à rechercher des cycles représentatifs des différentes itérations du graphe de sorte à maximiser le nombre de cycles choisis présents dans toutes les itérations du graphe.

Le travail sur ce sujet peut se découper en plusieurs parties, en fonction des compétences et de l'intérêt du ou de la stagiaire :

- une partie théorique - l'objectif étant d'étendre des résultats de complexité ou d'approximabilité du problème dans le cas où le graphe temporel vérifie des contraintes structurelles (par exemple si le degré maximum du graphe ne dépasse jamais 3).
- une partie pratique - l'objectif étant de programmer des algorithmes exacts, approchés ou heuristiques sans garantie pour résoudre le problème, soit dans le cas général, soit dans des cas particuliers qui auraient des propriétés intéressantes pour faciliter la résolution.

Il est également possible d'envisager des variantes du problème étudié.

2 Définition du problème étudié

Dans un graphe simple non orienté, une base de cycles est un ensemble minimum de cycles capable de générer tous les autres. On utilise ici pour les cycles une définition très générale : un cycle est un graphe dont les nœuds sont de degré pair. Ainsi deux cycles élémentaires disjoints forment un cycle, et un graphe eulérien est également un cycle. On définit une opération d'addition $\oplus$ sur les cycles : connaissant deux cycles c_1 et c_2 , le cycle $c_1 \oplus c_2$ consiste à garder les arêtes de $c_1 \cup c_2$ qui ne sont pas dans $c_1 \cap c_2$. La Figure 1 donne des exemples de cycles et d'addition de cycles.

On dit qu'un ensemble de cycles C génère un cycle d si $\bigoplus_{c \in C} c = d$. Une base de cycles est un ensemble minimum de cycles qui génèrent tous les autres avec cette définition. Une base de poids minimum est une base de cycle dont la somme des tailles des cycles est minimum.

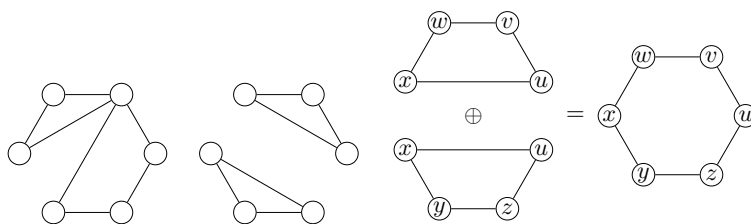


FIGURE 1

Trouver une base de cycles minimum pour un graphe peut se faire en temps polynomial, par exemple avec l'algorithme de Horton [3]. On s'intéresse ici à trouver des bases dans plusieurs graphes en maximisant l'intersection des bases choisies :

Problème 1 (MAX-MCBI). Soient $(G_1, G_2, \dots, G_k)$ des graphes ayant les mêmes nœuds, trouver un sous-ensemble de cycles B de $\bigcap_{i=1}^k G_i$ de taille maximum tel que, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ il existe une base minimum B_i de G_i telle que $B \subseteq B_i$.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'étude de trajectoires de conformations moléculaires. La trajectoire représente la succession d'apparitions et de disparitions de liaisons faibles au cours du temps. Les bases de cycles minimums font partie des propriétés structurales des molécules capables de caractériser certaines propriétés chimiques [1, 2]. Nous étudions la capacité de la similarité entre les bases minimums des conformations d'une trajectoire à caractériser de telles propriétés. Ce stage se concentre uniquement sur notre capacité à résoudre le problème MAX-MCBI.

Références

- [1] Ylène Aboulfath, Dominique Barth, Thierry Mautor, Dimitri Watel, and Marc-Antoine Weisser. Polymorphic cycle basis in a sequence of graphs to analyze the structural evolution of a molecular dynamic trajectory. In Petra Mutzel and Nicola Prezza, editors, *23rd International Symposium on Experimental Algorithms, SEA 2025, July 22-24, 2025, Venice, Italy*, volume 338 of *LIPIcs*, pages 1 :1–1 :14. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025.
- [2] Ylène Aboulfath, Sana Bougueroua, Alvaro Cimas, Dominique Barth, and Marie-Pierre Gai-geot. Time-resolved graphs of polymorphic cycles for h-bonded network identification in flexible biomolecules. *Journal of Chemical Theory and Computation*, 20(3) :1019–1035, 2024.
- [3] J. D. Horton. A polynomial-time algorithm to find the shortest cycle basis of a graph. *SIAM Journal on Computing*, 16(2) :358–366, apr 1987.

Déroulement et détails pratiques

Le niveau du ou de la stagiaire attendu est celui d'un BAC+5 avec des connaissances en programmation, en théorie des graphes, en algorithmique de graphes et en recherche opérationnelle.

La personne retenue sera accueillie soit dans les locaux du CNAM à Paris dans le laboratoire CEDRIC ou de l'ensIEE à Evry. Son encadrement au jour le jour sera effectué par **Dimitri Watel**, **Cédric Bentz** et **Christophe Picouleau**.

La durée du stage sera d'environ 5 mois, sur la période de fin d'études 2026 (avant, pendant ou après l'été 2026).

Contact :

Dimitri Watel, Maître de conférences de l'ensIIE (Evry), laboratoire CEDRIC-CNAM, dimitri.watel@ensiie.fr
Cédric Bentz, CNAM Paris, laboratoire CEDRIC-CNAM, cedric.bentz@cnam.fr
Christophe Picouleau, CNAM Paris, laboratoire CEDRIC-CNAM, christophe.picouleau@cnam.fr