

# Preuves de stabilité numériques sous perturbation en norme

Équipe concace @ inria Bordeaux / équipe PEQUAN @ LIP6/Sorbonne Université  
Emmanuel.Agullo@inria.fr, Luc.Giraud@inria.fr, Theo.Mary@lip6.fr

Stage de fin d'étude (M2/3A) - Printemps 2024

## 1 Contexte

L'algèbre linéaire numérique est centrale dans de nombreuses simulations pilotées par les modèles ou par les données. Le comportement en arithmétique finie de certains noyaux de calcul a été étudié dans le passé ce qui permet d'évaluer la qualité des résultats produits sur un ordinateur. En particulier, l'analyse en arithmétique IEEE de la méthode GMRES [1], introduite en 1987, pour la résolution de systèmes linéaires a été réalisée plus de vingt ans plus tard en 2006 [2]. Dans cette analyse, le modèle de perturbation est le même pour la représentation des données et pour les opérations arithmétiques. Ce modèle est fondé sur des perturbations contrôlées composante par composante (componentwise perturbations).

Pour traiter des tailles de problème de dimensions toujours croissantes, le recours à des techniques de compressions est incontournable. Ces compressions peuvent être de nature informatique, telles qu'implantées dans l'outil de compression SZ d'Argonne National Lab., ou numérique, comme dans le cas de calcul à base de tenseur de rang faible, e.g., Tensor-Train (TT). Dans ce contexte, les outils informatiques (e.g., SZ) ou numériques (e.g. TT), ne garantissent des qualités d'approximation qu'en norme. Ceci doit alors s'interpréter comme des perturbations en norme (normwise perturbations) sur les données. Ces données étant ensuite manipulées avec l'arithmétique idoine en terme de précision du calculateur cible. Ce contexte calculatoire est appelé calcul en arithmétique variable ou l'on décorrèle la précision sur les données de la précision de l'arithmétique matérielle de l'ordinateur.

## 2 Objectif

De nombreuses expérimentations numériques indiquent que les propriétés de stabilité des algorithmes classiques persistent dans le cas de perturbations normwise [4, 5]. L'objectif de ce stage est d'en faire les preuves théoriques sachant que les techniques de preuve classiques componentwise ne peuvent pas s'appliquer immédiatement au contexte normwise. Il s'agira donc de trouver les bons outils de preuve pour faire ce type d'analyse. Un objectif principal est l'étude de la stabilité inverse de GMRES avec perturbations normwise dans sa variante Gram-Schmidt Modifié (Modified Gram-Schmidt, MGS) ou Householder. Ceci nécessitera d'étudier en particulier la stabilité de ces deux schémas d'orthogonalisation [3].

### 3 Cadre collaboratif

Ce travail sera réalisé dans le contexte du projet cible Méthodes et algorithmes pour Exascale (ExaMa) du PEPR Numpex. Plus particulièrement, cette activité de recherche sera menée en collaboration entre l'équipe `concace` (Emmanuel Agullo, Luc Giraud) à l' `inria` Bordeaux et l'équipe PEQUAN du LIP6 à Sorbonne Université (Theo Mary).

Le stage s'effectuera de manière privilégiée à Bordeaux mais il est également envisageable d'être accueilli à Toulouse ou Paris.

### 4 Poursuite en thèse

Le stage pourra se **poursuivre en thèse** dans le contexte du projet cible Méthodes et algorithmes pour Exascale (ExaMa) du PEPR Numpex. L'objectif de la thèse sera d'approfondir les résultats du stage et de les valider expérimentalement dans des applications à large échelle. Pour ce faire, les algorithmes proposés seront développés dans la bibliothèque d'algèbre linéaire parallèle `compose`. Le travail se fera en collaboration avec `=airbus=` pour l'intégration dans l' application cible, ainsi qu'avec Argonne National Lab. pour le support des critères de compression au sein d'SZ.

### 5 Références

- [1] Youcef Saad and Martin H. Schultz. GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :856–869, 1986.
- [2] Christopher C. Paige, Rozloznic Miroslav, and Zdenek Strakos. Modified Gram–Schmidt (MGS), least squares, and backward stability of MGS-GMRES. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 28(1) :264–284, 2006.
- [3] Olivier Coulaud, Luc Giraud, and Martina Iannacito. On some orthogonalization schemes in TT-format. Research Report In preparation, Inria Bordeaux Sud-Ouest, 2022.
- [4] Emmanuel Agullo, Franck Cappello, Sheng Di, Luc Giraud, Xin Liang, and Nick Schenkels. Exploring variable accuracy storage through lossy compression techniques in numerical linear algebra : a first application to flexible GMRES. Research Report RR-9342, Inria Bordeaux Sud-Ouest, May 2020.
- [5] Emmanuel Agullo, Olivier Coulaud, Luc Giraud, Martina Iannacito, Gilles Marait, and Nick Schenkels. The backward stable variants of GMRES in variable accuracy. Research Report RR-9483, Inria Bordeaux Sud-Ouest, 2022.
- [6] N. Higham, T. Mary. Mixed precision algorithms in numerical linear algebra, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03537373>